大学院情報理工学研究科
博士前期課程一般入試　入学試験問題
（2022年8月17日実施）

【情報・ネットワーク工学専攻】

専門科目：［選択問題］

※注意事項

1．試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけない。

2．選択問題の問題冊子はこの注意事項を含めて１１枚、解答用紙は３枚である。

3．試験開始の合図の後、全ての解答用紙に受験番号を記入すること。

4．選択問題の試験時間は120分である。

5．選択問題では、８科目の中から３科目を選んで解答すること。

6．解答用紙の科目の番号欄には、選択した科目の番号を記入すること。
（採点は記入された番号についてのみ行う。誤記入、記入もれに注意すること）

7．解答は、科目ごとに別々の解答用紙（各科目ごとに１枚）を使用すること。
必要なら裏面を使用してもよいが、その場合は表面下に「裏面へ続く」と記入すること。

8．試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。

9．試験終了後、この問題冊子は持ち帰ること。

１０．解答は英語でもよい。

問題は次のページからです。

このページは問題冊子の枚数には
含みません。

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2022 年 8 月 17 日実施）

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

1　電気回路

以下の問題で虚数単位はjとする．分数の分子及び分母が複素数になる場合，各々実部及び虚部にまとめること．ただし，分母の実数化は不要である．また，分数内に分数が残らないようにすること．

図 1 のように損失を表す抵抗RとインダクタLで構成される負荷インピーダンス$\boldsymbol{Z}_{\mathrm{L}} = R + \mathrm{j}\omega L$に，キャパシタ$C$を並列に接続する．端子 ab に交流電圧(角周波数ω，フェーザ表示電圧$\boldsymbol{E}$)を印加したところ，電流$\boldsymbol{I}$が流れた．

(1) 電圧$\boldsymbol{E}$と電流$\boldsymbol{I}$が同相になる角周波数ω_0をR，L，Cで表わせ．ただし，$\omega_0 > 0$ rad/s かつ$R^2 < L/C$とする．

(2) 横軸を実軸，縦軸を虚軸とする複素平面上に，電圧$\boldsymbol{E}$と電流$\boldsymbol{I}$のベクトル図を描け．ただし，$0 < \omega < \omega_0$，$\omega = \omega_0$，$\omega > \omega_0$の各条件について，それぞれの図を示せ．なお，電圧ベクトルを基準とし，実軸に平行にすること．また，ベクトルの大きさは任意とし，位相に注意したベクトルの概形を描くこと．

(3) この回路の有効電力P_{e}及び無効電力P_{r}をω，R，L，C，$\boldsymbol{E}$を用いて表わせ．

(4) この回路の力率を常に 1 にするCをω，R，Lで表わせ．

図 2 のように，抵抗R_1，インダクタL_1からなる 1 次側回路と，抵抗R_2，インダクタL_2からなる 2 次側回路が相互インダクタMで結合されている．1 次側回路に交流電圧(角周波数ω，フェーザ表示電圧$\boldsymbol{E}$)を印加したところ，電流$\boldsymbol{I}_1$が流れた．また，そのとき 2 次側回路に電流$\boldsymbol{I}_2$が流れた．

(5) キルヒホッフの電圧則に基づいて，1 次側及び 2 次側回路それぞれの回路方程式を求めよ．

(6) 端子 ab から右を見た回路のインピーダンスは$\boldsymbol{Z} = R + \mathrm{j}X$となる．抵抗成分$R$及びリアクタンス$X$を$\omega$，$R_1$，$R_2$，$L_1$，$L_2$，$M$で表わせ．

(7) 図 3 は図 2 の等価回路である．インピーダンス$\boldsymbol{Z}_1$，$\boldsymbol{Z}_2$，$\boldsymbol{Z}_3$をω，R_1，R_2，L_1，L_2，Mで表わせ．

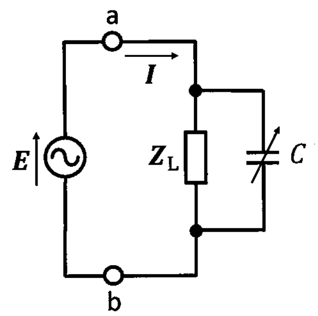


図 1

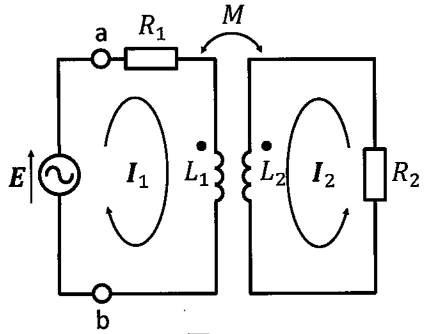


図 2

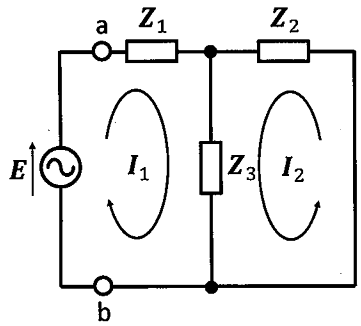


図 3

虚数単位: imaginary unit, 分数: fraction, 分子: numerator, 分母: denominator, 複素数: complex number, 実部: real part, 虚部: imaginary part, 抵抗: resistor, インダクタ: inductor, インピーダンス: impedance, キャパシタ: capacitor, 交流: alternating current, 電圧: voltage, 角周波数: angular frequency, フェーザ: phasor, 電流: current, 同相: in-phase, 実軸: real axis, 虚軸: imaginary axis, 複素平面: complex plane, ベクトル: vector, 位相: phase, 有効電力: effective power, 無効電力: reactive power, 力率: power factor, 相互インダクタ: mutual inductor, キルヒホッフの電圧則: Kirchhoff's voltage law, リアクタンス: reactance, 等価回路: equivalent circuit

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2022 年 8 月 17 日実施）

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

2　電磁気学

1. 真空中に置かれた半径 a [m]の無限に長い円柱導体に単位長さあたり（軸方向）Q [C]の電荷を与えたとき，導体内外の電界の大きさ E[V/m]を円筒導体中心軸からの距離 r [m]の関数として表し，r が 0 から a を越える範囲までグラフで示せ．ただし，真空の誘電率はε_0 [F/m]とし，円周率をπとする．

2. 半径がそれぞれ a_1 [m]と a_2 [m]の無限に長い 2 本の円柱導体 1 と円柱導体 2 が，導体の中心軸間の距離が d [m]で真空中に平行に置かれている．ただし，$a_1 \ll d, a_2 \ll d$ であり，二本の導体はそれぞれ独立であると近似する．真空の誘電率及び透磁率はそれぞれε_0 [F/m]，μ_0 [H/m]とし，円周率をπとして，以下の問に答えよ．
   (1). 導体 1 に単位長さあたり（軸方向）Q [C] ($Q > 0$)の電荷，導体 2 に単位長さあたり $-Q$ [C]の電荷を与えた．二つの導体の中心軸で囲まれる平面内で，導体間の導体 1 の中心軸からの距離 x [m]の点の電界の大きさ E[V/m]を求めよ．
   (2). 問(1)のとき導体間の電位差 V [V]を求めよ．
   (3). 導体間の単位長さあたりの静電容量 C [F]を求めよ．
   (4). この二本の導体において，導体 1 に一様な電流 I [A]を軸方向に流し，導体 2 には一様な電流 I [A]を導体 1 とは逆方向に流す．二つの導体の中心軸で囲まれる平面内で，導体間の導体 1 の中心軸からの距離 x [m]の点の磁束密度の大きさ B [T]を求めよ．
   (5). 平行導体の単位長さあたりの自己インダクタンス L [H]を求めよ．ただし，導体内部のインダクタンスは無視してよい．
   (6). 真空中の光速 c [m/s]は真空の誘電率及び透磁率で$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$として表せる．問(3)と(5)の結果から，真空中の光速 c を問(3)の静電容量 C と問(5)の自己インダクタンス L を用いて表せ．

3. 半径 a [m]の導体球と同心の導体球殻（内半径 b [m]，外半径 c [m]，$a < b < c$）からなる導体系を考える．導体球と導体殻の間の左半分は誘電率ε_1 [F/m]の誘電体 1，右の半分は誘電率ε_2 [F/m]の誘電体 2 で満たされている．内導体に Q [C]の電荷，球殻に $2Q$ [C]の電荷を与えた．真空の誘電率はε_0 [F/m]とし，円周率をπとして，以下の問に答えよ．
   (1). 誘電体 1 と 2 の中の電界の大きさ $E(r)$ [V/m]と電束密度の大きさ $D(r)$ [C/m^2]を導体球の中心からの距離 r [m]の関数として，それぞれ求めよ．
   (2). 誘電体 1 と 2 の $r = a$ の表面に現れる分極電荷密度σ_p [C/m^2]を求めよ．
   (3). 導体球の表面($r = a$)の電荷密度σ_a [C/m^2]，導体球殻の内側の表面($r = b$)の電荷密度σ_b [C/m^2]，導体球殻の外側の表面($r = c$)の電荷密度σ_c [C/m^2]をそれぞれ求めよ．

単位長さあたり (per-unit-length)，電荷 (charge)，電界 (electric field)，中心軸 (central axis)，真空 (vacuum)，誘電率 (permittivity)，円周率 (circumference ratio)，透磁率 (magnetic permeability)，電位差 (difference of electric potential)，静電容量 (capacitance)，電流 (electric current)，磁束密度 (magnetic flux density)，自己インダクタンス (self-inductance)，光速 (speed of light)，球殻 (spherical shell)，電束密度 (electric flux density)，分極電荷密度 (polarization/bound surface charge density)

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2022年8月17日実施）

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

3 確率統計

確率変数 Y_a $(a = 1, 2, \cdots)$ は，それぞれ，0以上の整数に値をとり，確率関数

$$f_a(k) = P(Y_a = k) = {}_aH_k \cdot p^a(1-p)^k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{\#}$$

に独立に従うとする．ここで，

$${}_aH_k = {}_{a+k-1}C_k = \binom{a+k-1}{k} \quad ({}_aC_0 = 1,\ {}_0C_0 = 1)$$

は重複組合せ（a 種類の物から重複を許して k 個取り出す組合せの総数）で，p $(0 < p < 1)$ はパラメータである．以降の設問において，必要であれば $q := 1 - p$ とおいて解答せよ．

最初に $a = 1$ の場合を考え，$X = Y_1$ とおく．

(1) X の積率母関数 $\varphi(\theta) = E[e^{\theta X}]$ を求めよ．ただし，$(1-p)e^{\theta} < 1$ であるとする．

(2) X の期待値 $E[X]$ と，分散 $V[X]$ を求めよ．

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は，X と同一の分布 $f_1(k)$ に独立に従う確率変数であるとし，パラメータ p が未知である場合を考える．

(3) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の標本値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が得られたとき，p の最尤推定値 $\widehat{p}$ を求めよ．

次に $a = 1, 2, \cdots$ が一般的な場合を考える．

(4) 重複組合せについて，次の関係式が成立することを論証せよ．

$${}_{a+1}H_k = \sum_{m=0}^{k} {}_aH_m \quad (a = 1, 2, \cdots, k = 0, 1, \cdots)$$

(5) Y_a と Y_1 が独立なとき，次の関係式が成立することを，確率関数 (#) に関する畳み込み演算を用いて示せ．

$$Y_{a+1} = Y_a + Y_1 \quad (a = 1, 2, \cdots)$$

(6) Y_a の積率母関数 $\varphi_a(\theta) = E[e^{\theta Y_a}]$ を求めよ．

確率変数：random variables, 0以上の整数に値をとり：take values in integer greater than or equal to zero, 確率関数：probability function, 独立に：independently, 重複組合せ：combination with repetition, パラメータ：parameter, 必要であれば：if necessary, 積率母関数：moment generating function, 期待値：expectation, 分散：variance, 同一の分布：identical distribution, 未知：unknown, 標本値：sample values, 最尤推定値：maximum likelihood estimate, 関係式：relation, 論証せよ：prove by argument, 畳み込み演算を用いて示せ：show by convolution operation

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2022 年 8 月 17 日実施）

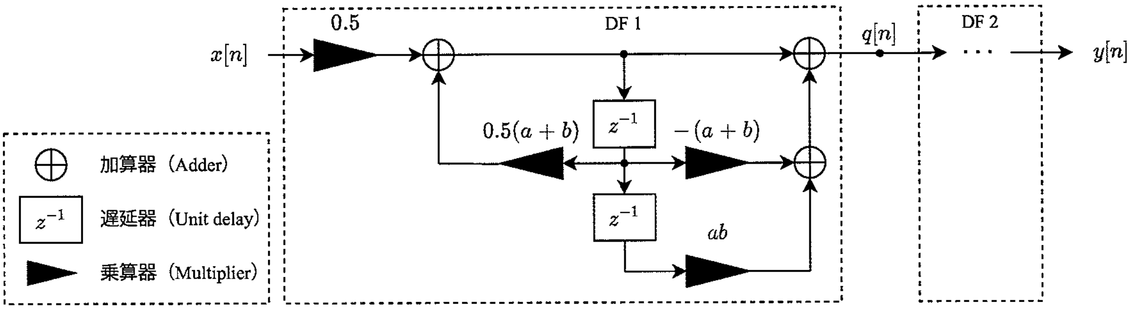
選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

4　信号処理

問1.　下図に示す，2 つのディジタルフィルタ DF 1 と DF 2 を縦続接続したシステムを考える．a と b を 0 より大きな実数，システムの入力を $x[n]$，出力を $y[n]$，DF 1 からの出力を $q[n]$ （$q[n]=0$ $(n<0)$）とする．また， DF 1 と DF 2 の伝達関数をそれぞれ $F(z)$ と $G(z)$ と表し，システム全体の伝達関数を $H(z)$ とする．以下の問いに答えよ．



(1) DF 1 のシステムの伝達関数 $F(z)$ を求めよ．

(2) $F(z)$ の零点と極を a と b を用いて求め，安定性について述べよ．

(3) システム全体の伝達関数が $H(z)=1$ となるように DF 2 の伝達関数 $G(z)$ を求め，DF 2 の安定性について述べよ．

(4) (3)で求めた DF 2 を加算器，乗算器，遅延器を用いて構成せよ．

(5) (3)で求めた DF2 のインパルス応答 $g[n]$ を求めよ．

(6) $a=b=0.5$，$q[0]=0.5$，$q[1]=0.75$，$q[2]=0$の時，入力 $x[n]$ （$n=0,1,2$）を求めよ．

問2.　自己相関関数が $\phi_{xx}(\tau)=A\delta(\tau)$ で与えられる定常エルゴード性不規則信号 $x(t)$ を考える．ここで，$\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数とする．フーリエ変換を$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j\omega t}dt$，逆フーリエ変換を$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\,e^{jt\omega}d\omega$とする（$j$ は虚数単位）．以下の問いに答えよ．

(1) $x(t)$ を以下の振幅応答 $H(\omega)$ を持つ低域通過フィルタに入力した．フィルタ出力 $y(t)$ の電力スペクトル密度 $\Phi_y(\omega)$ を求めよ．

$$H(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le 2\pi B\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

(2) フィルタ出力 $y(t)$ の自己相関関数 $\phi_{yy}(\tau)$ を求め，横軸を τ として概形を図示せよ．

ディジタルフィルタ：Digital filter，縦続：Cascaded，実数：Real value，入力：Input，出力：Output，伝達関数：Transfer function，零点：Zero，極：Pole，安定性：Stability，加算器：Adder，乗算器：Multiplier，遅延器：Unit delay，インパルス応答：Impulse response，自己相関関数：Autocorrelation function，定常エルゴード性不規則信号：Stationary ergodic random signal，ディラックのデルタ関数：Dirac delta function，フーリエ変換:Fourier transform，逆フーリエ変換:Inverse Fourier transform，振幅応答:Amplitude response，低域通過フィルタ：Lowpass filter，電力スペクトル密度：Power spectral density

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2022 年 8 月 17 日実施）

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

5　アルゴリズムとデータ構造

以下の性質を持ち，根ノードに最小値を持つ二分ヒープ (単にヒープと呼ぶ) を一次元配列 A により実現する．

- 最大レベルを除くすべてのレベルのノードが完全に埋まっており，最大レベルは左からノードが詰められた二分木である
- 親ノードの要素の値は，常に子ノードの要素の値以下である

ヒープの各ノードに番号 i (i=0, 1, 2, ...)を割り振る．根ノードの番号を 0 番，i 番のノードの左側の子ノードを 2i+1 番，右側の子ノードを 2i+2 番とする．i 番のノードを配列の A[i]に格納する．ヒープの操作として，ノードの追加，根ノードの取り出し，ノードの値の更新，ヒープが空かどうかの確認の 4 種類を考える．これらの操作を実現する処理には，ヒープの性質を維持するように木を再構成する処理を含めるものとする．

(1) 値 10, 8, 2, 5, 3, 6 をこの順にヒープに追加した．配列 A の内容を記せ．

(2) ヒープから根ノードを取り出す処理の手順を記せ．

頂点の集合 V，辺の集合 E による重み付きグラフ G=(V, E)を考える．頂点 u と v を結ぶ辺を(u, v)∈E，辺の重みを w(u, v)≧0 とする．2 頂点間の距離を，2 頂点を結ぶ経路を構成する辺の重みの和とし，2 頂点間の最短経路を，距離が最小となる経路とする．図 1 は G の例であり，G の頂点を円，G の辺を円と円を結ぶ直線で表す．円内の番号は頂点番号，辺に添えた数値はその重みである．アルゴリズム 1 により，G の任意の始点 s∈V から全頂点への最短経路とその距離が求まる．(ア)(イ)は空欄のままで正しく動作する．Q は，s からの最短経路が確定していない頂点の集合であり，d(v)は，s からの最短経路が確定した頂点のみを経由し，s から v に至る最短経路の距離である．

アルゴリズム 1

入力: 重み付きグラフ G=(V, E), 各辺の重み w, 始点 s

```
d[s]←0, s を除くすべての v∈V について d[v]←∞
[    (ア)    ]
Q に V の要素をすべて追加
while Q ≠ Ø do:
   Q から d[u]が最小である頂点 u を取り出す
   for each (u から辺がある頂点 v∈Q):
      if d[v] > d[u] + w[u, v]:
         d[v] ← d[u] + w[u, v]
         [    (イ)    ]
```

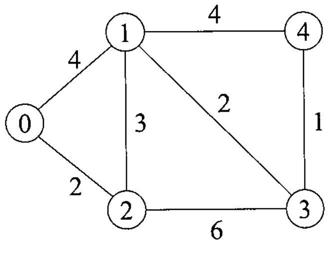


図 1. 重み付きグラフ

(3) 図 1 における頂点 0 から各頂点への最短経路の距離を，アルゴリズム 1 により最短経路が確定する順に，**頂点番号:距離**の形式ですべて記せ．アルゴリズム 1 中の空欄(ア)(イ)は無視すること．

【次ページに続く】

(4) アルゴリズム1の実行結果を利用して，各頂点への最短経路を出力する関数を考える．まず，頂点番号を要素とする一次元配列 p を用い，アルゴリズム1の (ア)(イ)に以下を追加した．

(ア) **すべての** v∈V **について** p[v] ← NULL　　　　(イ) p[v] = u

始点 s，終点 v，配列 p を引数とし，s から v への最短経路の頂点番号を<u>逆順</u>に出力 (printf) する関数のソースコードを C 言語で記せ． C 言語の文法に厳密に従う必要はない．

(5) アルゴリズム1の Q を，d(v)の値に基づき v∈V を格納するヒープに変更する．あわせて 6 行目の v∈Q を v∈V に修正する (結果には影響しない)．アルゴリズム中でヒープの操作が必要となるすべての行について，行番号と操作の種類 (問題 (1) に記した 4 種類の操作のいずれか) を記せ．

根ノード: root node, 二分ヒープ: binary heap, ヒープ: heap, 一次元配列: 1-dimensional array, ノード:node, 二分木: binary tree, 親ノード: parent node, 子ノード: child node, 頂点: vertex , 辺: edge, 重み付きグラフ: weighted graph, 最短経路: shortest path, 逆順: reverse order

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

6　計算機の基本原理

西暦と令和の年を相互に変換する論理回路を作る．基本仕様を下記の(a)～(d)とするとき，(1)～(5)の問に答えよ．なお，西暦 2019 年は令和 1 年，西暦 2022 年は令和 4 年である．

(a) 西暦から令和に変換するとき，西暦 2019～2099 年の範囲の年のみを入力対象とする．

(b) 令和から西暦に変換するとき，変換後の西暦が 2019～2099 年の範囲となる令和の年のみを入力対象とする．

(c) 回路を簡単にするため，入出力に使う西暦の年は 10 進数の下 2 桁だけを使用する．
例）西暦 2019 年は 19 年，西暦 2099 年は 99 年．

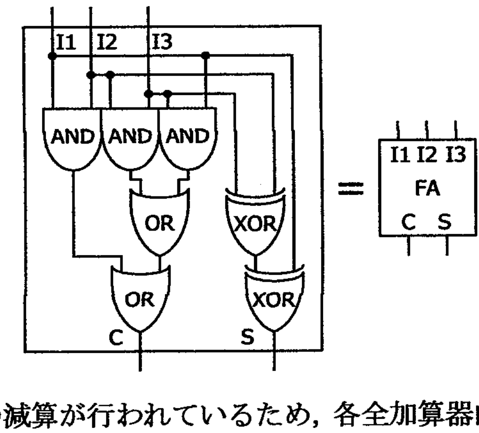
(d) 年の入出力は符号なし 2 進数とする．

(1) 西暦 2022 年の下 2 桁の 22 年を令和 4 年に変換する計算式を 10 進数の減算で表せ．またその計算過程を，2 の補数の表現による 2 進数の加算で示せ．

(2) 令和から西暦に変換するとき，基本仕様の条件から，入力してよい令和の年の最小値と最大値を 2 進数で表せ．

以下では，入出力を(2)の答えの範囲としたとき，その入出力に必要なビット数が最小である回路を考える．

(3) 西暦から令和に変換する回路を，下記の全加算器 FA だけを用いて作成せよ．全加算器は下図右側の 3 入力 2 出力のブラックボックスを用い，内部を描く必要はない．なお，変換回路の入力の各ビットは x_i（i=0, 1, 2, …），出力の各ビットは y_i（i=0, 1, 2, …）と記し，それぞれ x_0 と y_0 を最下位桁とすること．また，定数入力の各ビットはそのまま 0 または 1 と記し，使用しない全加算器の出力線はそのまま残すこと．



(4) (3)の回路では定数の減算が行われているため，各全加算器内の論理ゲートを減らして回路を簡単にすることができる．最下位ビットの x_0 および，4 ビット目の x_4 が入力される 2 ヶ所の全加算器について，それぞれ簡単になった内部の回路を描け．

(5) 西暦と令和の切り替え信号を t とし，t が 0 のとき入力の西暦を令和に変換して出力し，t が 1 のとき入力の令和を西暦に変換して出力する回路を，全加算器と NOT ゲートだけを用いて作成せよ．

【次ページに続く】

【前ページから続く】

西暦：A.D.，令和：Reiwa era, 論理回路：logic circuit, 符号なし2進数：unsigned binary number, 10進数：decimal number, 2の補数：2's complement, 全加算器：full adder, 論理ゲート：logic gate, 最下位ビット：least significant bit, NOTゲート：NOT gate

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

7　数値計算

非線形方程式 $f(x)=0$ の近似解をニュートン法

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

により求めることを考える．ただし，関数 $f(x)$ は2回連続微分可能であり，1階微分，2階微分をそれぞれ $f'(x), f''(x)$ と表す．また，方程式 $f(x)=0$ は区間 $[0,\infty)$ で唯一の解 $x=\alpha$ を持ち，初期値 x_0 を $x_0 > \alpha$ となるように取る．このとき，次の問に答えよ．

1. ニュートン法の反復式(1)は，関数 $f(x)$ を $x = x_n$ の周りで1次関数で近似し，その値が0となる点を x_{n+1} とすることにより得られる．この方針に基づき，式(1)を導出せよ．
2. 区間 $[0,\infty)$ において $f'(x)>0$ かつ $f''(x)>0$ であるとする．このとき，$x_n > \alpha$ ならば，式(1)で計算した x_{n+1} について次の(a)，(b)が成り立つことを示せ．

   (a) $x_{n+1} < x_n$,

   (b) $x_{n+1} > \alpha$.

   ただし，ある $\xi \in [\alpha, x_n]$ が存在して，

   $$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)(\alpha - x_n)^2 \tag{2}$$

   が成り立つことを使ってよい．
3. $f(x)$ が小問2.と同じ条件を満たすとき，小問2.の結果を用いて，$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ が成り立つことを示せ．ただし，下に有界な単調減少数列は収束することを用いてよい．
4. 近似解 x_n の誤差を $e_n = x_n - \alpha$ とする．$f(x)$ が小問2.と同じ条件を満たすとき，e_{n+1}/e_n^2 は $n\to\infty$ である定数に収束することを示せ．また，この定数を求めよ．
5. 小問4.のような収束を2次収束と呼ぶ．近似解 x_n が真の解 α に2次収束するとき，x_n の有効桁数は1反復ごとにどのように変化するか．

非線形方程式：nonlinear equation，近似解：approximate solution，
ニュートン法：Newton's method，2回連続微分可能：twice continuously differentiable，
1階微分：first order derivative，2階微分：second order derivative，初期値：initial value，
反復式：iteration formula，1次関数：linear function，下に有界：bounded below，
単調減少数列：monotonically decreasing sequence，2次収束：quadratic convergence，
有効桁数：significant digits

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2022 年 8 月 17 日実施）

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

8　離散数学とオートマトン

アルファベット $\Sigma=\{0,\ 1\}$ 上の言語に関する以下の問に答えよ。Σ 上の有限長の文字列（空文字列 λ を含む）の集合を Σ^* とする。文字列 $w\in\Sigma^*$ が square であるとは、『$\exists x\in\Sigma^*,\ w=xx$』が成り立つことと定義する。例えば $w=001001$ は $x=001$ とすれば $w=xx$ となるから square である。同様に λ, 00, 1010 なども square であるが、001011 は square ではない。非負整数 $n\geqq 0$ に対し、$Sq^{\leqq n}$ を Σ 上の square で長さが n 以下のもの全ての集合と定義する。必要に応じて床関数 $\lfloor r\rfloor$ を用いてよい。床関数とは実数 r を受け取りそれ以下の最大の整数を返す関数のことである。

1. $Sq^{\leqq 7}$ の要素を全て列挙せよ。

2. $Sq^{\leqq n}$ のサイズを n の関数で表せ。

3. $Sq^{\leqq 4}$ を受理する決定性有限オートマトンを設計し、図示せよ。初期状態は→で、受理状態は 2 重円で表すようにせよ。

4. 長さの制限を外した場合、与えられた文字列が square かどうかを判定する有限オートマトンは存在しない。このことを以下のように背理法で証明する。
   (1) 仮にこのようなオートマトンが存在したとして、それを B とする。B の状態数よりも大きな自然数 k に対し、0^k10^k1 が入力された時、B は最初の 1 を読む前にある状態に 2 回以上到達する。このことを証明せよ。
   (2) (1) を踏まえて、B は square でない文字列も受理してしまうことを証明せよ。

アルファベット (alphabet), 有限長の文字列 (word of finite length), 空文字列 (empty word), 非負整数 (non-negative integer), 床関数 (floor function), 実数 (real number), 決定性有限オートマトン (deterministic finite automaton), 初期状態 (initial state), 受理状態 (accepting state)